

**В.Л. ДОБРОСКОК**, д-р техн. наук, **Л.Н. АБДУРАЙИМОВ**,  
**С.И. ЧЕРНЫШОВ**, канд. техн. наук, Харьков, Украина

## **КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ТРИАНГУЛЯЦИИ 3D МОДЕЛЕЙ ПРОМЫШЛЕННЫХ ИЗДЕЛИЙ**

У статті розглянуті критерії якості тріангуляції 3D моделей промислових виробів, одержуваних в САD-системах для наступної матеріалізації інтегрованими технологіями (Rapid Prototyping). Розглянуті існуючі й запропоновані нові узагальнені нормалізовані критерії, що дозволяють підвищити рівень оцінки якості тріангуляції.

В статье рассмотрены критерии качества триангуляции 3D моделей промышленных изделий, получаемых в САD-системах для последующей материализации интегрированными технологиями (Rapid Prototyping). Рассмотрены существующие и предложены новые обобщенные нормализованные критерии, позволяющие повысить уровень оценки качества триангуляции.

*V.L. DOBROSKOK, L.N. ABDURAJIMOV, S.I. CHERNYSHOV*  
*CRITERIA OF THE TRIANGULATION QUALITY 3D MODELS OF INDUSTRIAL PRODUCTS*

The article considers the quality criteria of the triangulation of 3D models of industrial products, obtained in CAD-systems for further materialization by integrated technologies (Rapid Prototyping). Reviewed existing and proposed new summarized and normalized criteria to improve the quality evaluation of the triangulation.

### *Постановка проблемы*

Высокие требования к техническим характеристикам промышленных изделий, получаемых технологиями Rapid Prototyping, определяют необходимость использования качественных исходных 3D моделей.

Современные системы твердотельного 3D моделирования, оперируют объектами, называемыми телами. В общем случае твердотельный объект может быть построен на базе связанных поверхностей различных типов, ограничивающих занимаемую телом часть пространства. Могут использоваться как плоские, так и криволинейные поверхности различных порядков. При подготовке моделей для последующей материализации используются только плоские поверхности. Тогда такие тела называют многогранниками [8] (полигонами, плоскогранными или фасеточными) [4]. Криволинейные поверхности аппроксимируют системой треугольных или четырехугольных плоских граней с использованием специальных алгоритмов преобразования. Процесс, при котором формообразующие поверхности твердого тела аппроксимируются системой треугольных граней, назы-

вается дискретизацией или триангуляцией (триангулированием) [5]. В свою очередь, треугольники могут быть как криволинейными, так и прямолинейными. Применительно к технологиям Rapid Prototyping рассматривается только триангуляция прямолинейными треугольниками.

Для практических целей используются различные методы триангуляции. Все методы триангуляции по принципу построения можно разбить на два больших класса: прямые [3] и итерационные [2] (рис. 1).

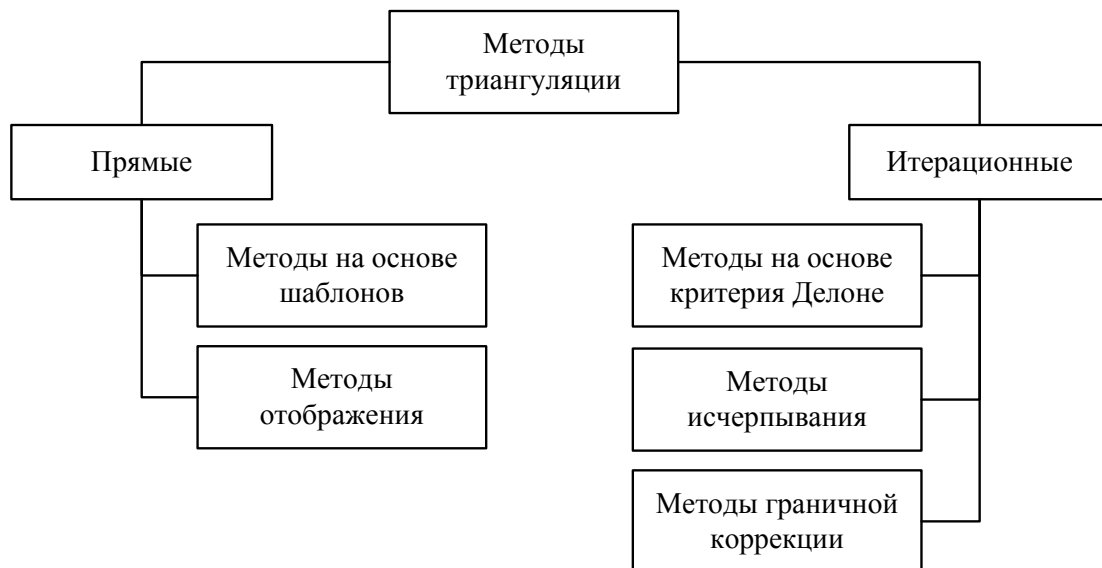


Рисунок 1 – Классификация методов триангуляции по принципу построения

По сфере применения можно выделить две схемы триангуляции (рис. 2):

- двумерная, когда плоский многоугольник покрывается множеством треугольников (рис. 2, а);
- трехмерная, которая может использовать в качестве элементов аппроксимации, как плоские треугольники (рис. 2, б), так и тетраэдры (рис. 2, в). В первом случае поверхность модели покрывается множеством связанных и неперекрывающихся между собой 4-х треугольников  $\{V_1V_2V_3, V_1V_4V_2, V_3V_2V_4, V_1V_3V_4\}$ . Во втором случае внутренний объем трехмерного тела разбивается на множество неперекрывающихся между собой 8-ми тетраэдров  $\{V_1V_5V_8V_{10}, V_2V_5V_6V_7, V_3V_7V_9V_{10}, V_4V_6V_8V_9, V_5V_6V_7V_{10}, V_5V_6V_8V_{10}, V_6V_7V_9V_{10}, V_6V_8V_9V_{10}\}$ .

Качество изготавливаемых промышленных изделий достигается за счет использования достаточно точных и корректных триангуляционных 3D моделей. Причем качество триангуляции зависит как от количества треугольников, так и от их геометрических характеристик.

Поскольку триангуляционная модель формируется на базе твердотельной CAD модели изделия, то следует выявить связь критериев качества с аппроксимационными свойствами триангуляционной модели.

#### *Анализ литературы*

Качество модели существенно зависит от геометрических характеристик элементов аппроксимации [6; 7]. В настоящее время, применительно к трехмерной триангуляции моделей изделий тетраэдрами, предложено достаточно много специальных критериев качества [3; 7; 9-11].

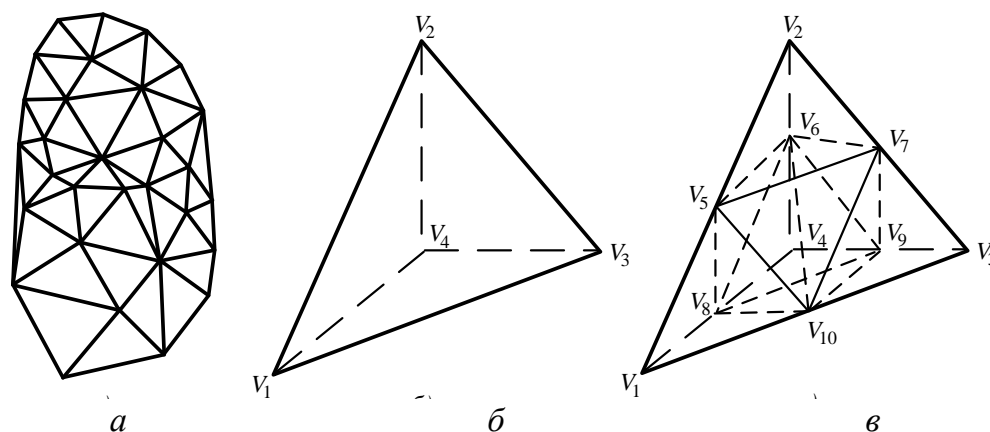


Рисунок 2 – Схемы триангуляции: а – двумерная триангуляция; б – трехмерная триангуляция треугольниками; в – трехмерная триангуляция тетраэдрами

В табл. 1 приведены критерии качества с расчетными формулами, интервалами возможных значений и оптимальными значениями, которые рассчитаны для идеального случая – правильного тетраэдра. Значения приведены с точностью до 6 значащих цифр.

Основным недостатком приведенных критериев является различие интервалов возможных значений (табл. 1), что существенно затрудняет оценку качества триангуляции 3D моделей.

*Цель статьи* – рассмотреть существующие и предложить новые обобщенные нормализованные критерии, позволяющие повысить уровень оценки качества триангуляции.

#### *Изложение основного материала*

В результате анализа была предложена система обобщенных нормализованных критериев качества триангуляции: дифференциальных (на уровне треугольников) и интегральных (на уровне модели в целом). Нормализация критериев обеспечивается путем ввода в расчетные зависимости нормализующих коэффициентов для приведения интервалов возможных значений к единому диапазону (0, 1]. Значение 0 (левая граница интервала возможных значений) критерии принимать не могут в связи исключения из рассмотрения вырожденных треугольников с нулевыми линейными и угловыми характеристиками. Оптимальные значения критериев рассчитывались для случая правильного треугольника и для всех критерии-

ев соответствуют 1 (правая граница интервала возможных значений). Условно критерии качества триангуляции можно разделить на две группы – на базе линейных и угловых характеристик треугольников.

Таблица 1 – Критерии оценки качества трехмерной триангуляции 3D моделей [3; 11]

Критерий качества	Формула	Интервал возможных значений	Оптимальное значение
Отношение радиуса описанной сферы $R$ к радиусу вписанной $r$	$\beta = \frac{R}{r}$	$1, +\infty$	3.0
Отношение длины наибольшего ребра $l_{\max}$ к радиусу вписанной сферы $r$	$\sigma = \frac{l_{\max}}{r}$	$1, +\infty$	4.898979
Отношение радиуса описанной сферы $R$ к длине наибольшего ребра $l_{\max}$	$\omega = \frac{R}{l_{\max}}$	$\left[ \frac{1}{2}, +\infty \right)$	0.612375
Отношение длин наибольшего ребра $l_{\max}$ к наименьшему $l_{\min}$	$\tau = \frac{l_{\max}}{l_{\min}}$	$1, +\infty$	1.0
Отношение 4-й степени объема тетраэдра $V$ к кубу суммы квадратов площадей граней $S_i$	$k = \frac{V^4}{\left( \sum_{i=1}^4 S_i^2 \right)^3}$	0,1	$4.572474 \cdot 10^{-4}$
Отношение куба среднеарифметического длин ребер $l_i$ к объему тетраэдра $V$	$\alpha = \frac{\left( \sum_{i=1}^6 l_i \right)^3}{216V}$	$1, +\infty$	8.485281
Отношение куба среднего геометрического длин ребер $l_i$ к объему тетраэдра $V$	$\gamma = \frac{\left( \prod_{i=1}^6 l_i \right)^{1/2}}{V}$	$1, +\infty$	8.485281
Наибольший двугранный угол $\delta$	$\delta$	$\left[ \arccos \frac{1}{3}, \pi \right)$	$\arccos \frac{1}{3}$ (1.230959)
Среднее отношение $\eta$	$\eta = \frac{12 \ 3V^{2/3}}{\sum_{i=1}^6 l_i^2}$	0,1	1.0
Минимальный телесный угол $\theta$	$\theta$	$\left( 0, \frac{\pi}{2} \right]$	$\frac{\pi}{2}$

Применительно к единичному элементу триангуляционной модели (рис. 3) приведем дифференциальные критерии качества:

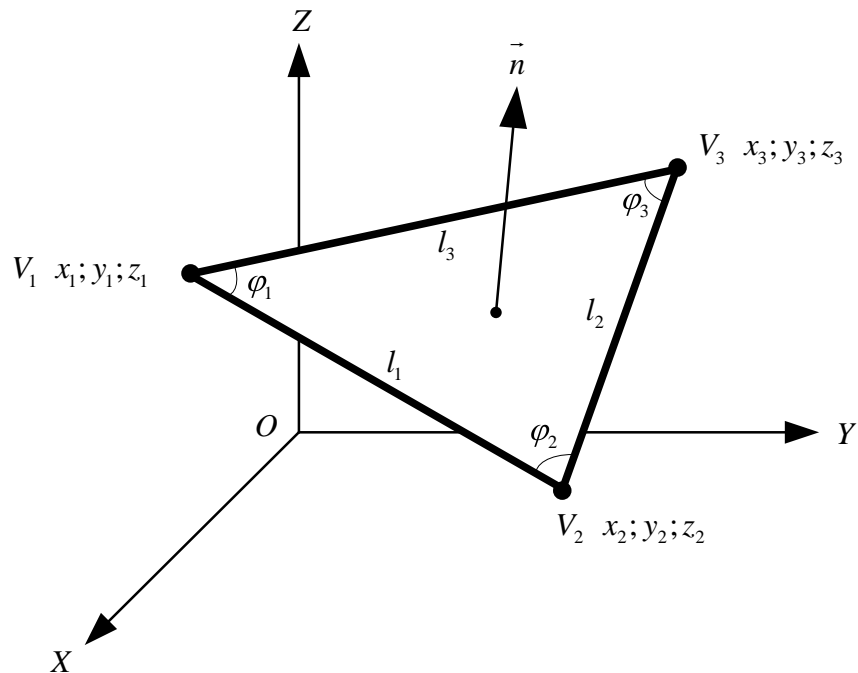


Рисунок 3 – Единичный элемент триангуляционной модели  $V_1V_2V_3$ :  
 $\vec{n}$  - нормальный вектор;  $l_1, l_2, l_3$  - стороны;  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  - внутренние углы.

• отношение длины наименьшей стороны треугольника  $l_{\min} = \text{MIN}(l_1, l_2, l_3)$  к радиусу описанной окружности  $R$ :

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{l_{\min}}{R}; \quad (11)$$

• отношение радиуса вписанной окружности  $r$  к длине наибольшей стороны треугольника  $l_{\max} = \text{MAX}(l_1, l_2, l_3)$ :

$$Q_2 = 2\sqrt{3} \frac{r}{l_{\max}}; \quad (12)$$

• отношение радиуса вписанной окружности  $r$  к радиусу описанной  $R$ :

$$Q_3 = 2 \frac{r}{R}; \quad (13)$$

• отношение длин наименьшей стороны треугольника  $l_{\min} = \text{MIN}(l_1, l_2, l_3)$  к наибольшей  $l_{\max} = \text{MAX}(l_1, l_2, l_3)$ :

$$Q_4 = \frac{l_{\min}}{l_{\max}}; \quad (14)$$

• отношение площади треугольника  $S$  к сумме квадратов длин его сторон  $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$ :

$$Q_5 = 4\sqrt{3} \frac{S}{\sum_{i=1}^3 l_i^2}; \quad (15)$$

• отношение наименьшего  $\varphi_{\min} = \text{MIN}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  угла треугольника к наибольшему  $\varphi_{\max} = \text{MAX}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ :

$$Q_6 = \frac{\varphi_{\min}}{\varphi_{\max}}; \quad (16)$$

• отношение площадей вписанных  $S_r$  и описанных  $S_R$  окружностей треугольника:

$$Q_7 = 4 \frac{S_r}{S_R}; \quad (17)$$

• отношение площади треугольника  $S$  к квадрату длины наибольшей его стороны  $l_{\max}^2 = \text{MAX}(l_1, l_2, l_3)^2$ :

$$Q_8 = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{S}{l_{\max}^2}. \quad (18)$$

Из приведенного списка критериев качества можно исключить критерии  $Q_7, Q_8$ , т. к. они являются производными от  $Q_3, Q_5$  соответственно, тогда критерии  $Q_1 \dots Q_6$ , будут являться наиболее представительными.

В качестве основных интегральных критериев качества триангуляции в работе рассматривались:

• среднее арифметическое значений дифференциальных критериев качества:

$$Q_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_i; \quad (19)$$

где:  $N$  – количество элементов триангуляции;

• среднее гармоническое значений дифференциальных критериев качества:

$$Q_g = N / \sum_{i=1}^N \frac{1}{Q_i}. \quad (20)$$

Особенностью среднего гармонического, как общего показателя качества модели, является повышенная чувствительность к появлению отдельных малых значений.

Сравнительный анализ качества триангуляции систем 3D моделирования промышленных изделий выполнялся для наиболее распространенных CAD-систем: *SolidWorks*, *PowerSHAPE*, *КОМПАС-3D*, *T-FLEX Parametric CAD*, *AutoCAD*, *Geomagic Studio*, *MeshLab*, *Magics*. В качестве тестовых моделей были выбраны базовые геометрические тела, наиболее часто используемые в машиностроении: куб, цилиндр, конус и сфера (рис. 4). Предварительные расчеты показали, что наиболее целесообразно использовать критерий  $Q_2$  – отношение радиуса вписанной окружности к длине наибольшей стороны треугольника.

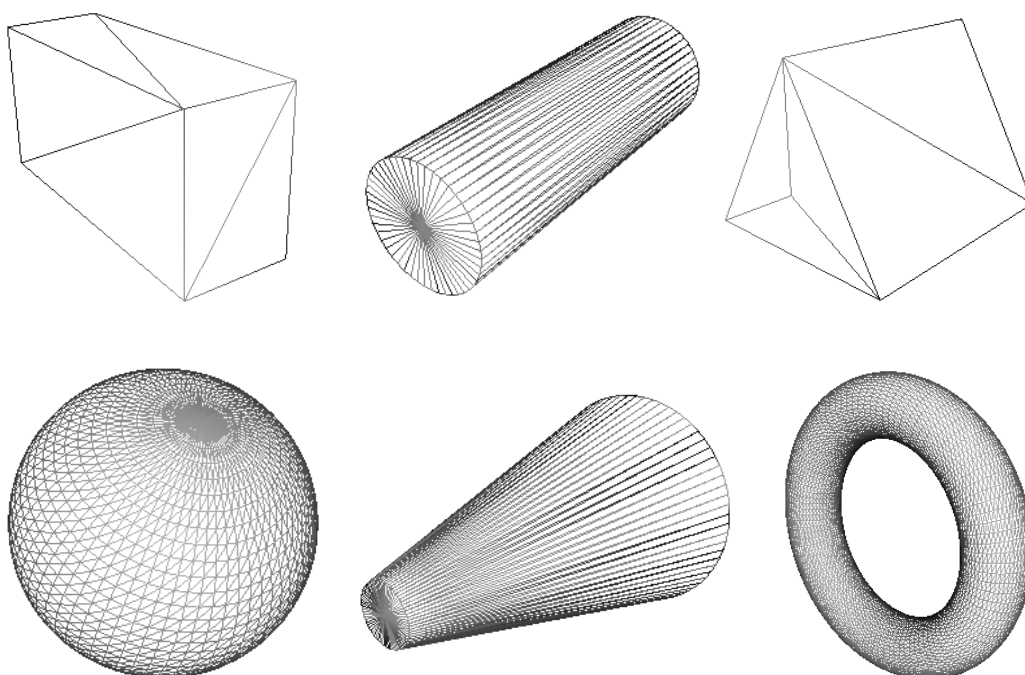


Рисунок 4 – Базовые объекты, используемые при твердотельном моделировании изделий: прямоугольная и треугольная призмы, цилиндр, сфера, конус и тор.

Значения интегральных критериев качества триангуляции тестовых моделей приведены в табл. 2. Для каждой модели указано количество элементов (треугольников и вершин), полученных при экспорте из соответствующей CAD-системы в триангуляционное представление. Параметры экспорта модели выбирались по умолчанию. Отличия в количестве элементов аппроксимации у одинаковых моделей свидетельствует о применении CAD-системами различных собственных алгоритмов триангуляции. В таблице также приведены минимальные  $Q_{\min}$ , средние арифметические  $Q_a$  и гармонические  $Q_g$  значения выбранного критерия качества.

Таблица 2 – Экспериментальные значения критериев оценки качества триангуляционных моделей

Тестовая модель	CAD-система	Кол-во элементов		Качество, $Q \in [0, 1]$		
		треуг.	вершин	$Q_{\min}$	$Q_a$	$Q_g$
Куб ( $a = 200$ мм)	<i>SolidWorks 2008</i>	12	8	0,35872	0,35872	0,35872
	<i>PowerSHAPE 2010</i>	12	8	0,35872	0,35872	0,35872
	<i>КОМПАС-3D 11</i>	12	8	0,35872	0,35872	0,35872
	<i>T-FLEX Parametric CAD 11</i>	140	72	0,04804	0,30850	0,21761
	<i>AutoCAD 2011</i>	12	8	0,35872	0,35872	0,35872
	<i>Geomagic Studio 10</i>	192	98	0,35872	0,35872	0,35872
	<i>MeshLab 1.3.0</i>	12	8	0,35872	0,35872	0,35872
	<i>Magics 12.0.1.2</i>	12	8	0,35872	0,35872	0,35872
Цилиндр ( $R = 100$ мм, $H = 200$ мм)	<i>SolidWorks 2008</i>	220	112	0,02438	0,04635	0,04325
	<i>PowerSHAPE 2010</i>	888	446	0,00608	0,01275	0,01119
	<i>КОМПАС-3D 11</i>	124	64	0,00447	0,07619	0,05120
	<i>T-FLEX Parametric CAD 11</i>	444	224	0,03662	0,14455	0,12541
	<i>AutoCAD 2011</i>	148	76	0,03594	0,06532	0,06432
	<i>Geomagic Studio 10</i>	312	158	0,30246	0,35467	0,34209
	<i>MeshLab 1.3.0</i>	144	74	0,07192	0,10513	0,09464
	<i>Magics 12.0.1.2</i>	896	450	0,01206	0,01801	0,01604
Конус ( $R = 100$ мм, $H = 200$ мм)	<i>SolidWorks 2008</i>	110	57	0,02185	0,04392	0,04102
	<i>PowerSHAPE 2010</i>	774	386	0,00004	0,00762	0,00038
	<i>КОМПАС-3D 11</i>	62	33	0,00420	0,07222	0,04870
	<i>T-FLEX Parametric CAD 11</i>	422	213	0,03662	0,16329	0,09494
	<i>AutoCAD 2011</i>	74	39	0,03594	0,06187	0,06110
	<i>Geomagic Studio 10</i>	228	116	0,09328	0,25275	0,18891
	<i>MeshLab 1.3.0</i>	72	38	0,06493	0,10163	0,08838
	<i>Magics 12.0.1.2</i>	448	226	0,01080	0,01737	0,01488
Сфера ( $R = 100$ мм)	<i>SolidWorks 2008</i>	5852	2928	0,06709	0,29839	0,24515
	<i>PowerSHAPE 2010</i>	85384	42694	0,01706	0,32824	0,28585
	<i>КОМПАС-3D 11</i>	930	467	0,14898	0,31115	0,28619
	<i>T-FLEX Parametric CAD 11</i>	4970	2487	0,07237	0,29909	0,24845
	<i>AutoCAD 2011</i>	1368	686	0,12602	0,30560	0,27440
	<i>Geomagic Studio 10</i>	528	266	0,17975	0,31530	0,29688
	<i>MeshLab 1.3.0</i>	1280	642	0,44216	0,46491	0,46439
	<i>Magics 12.0.1.2</i>	48840	24422	0,02410	0,29242	0,20732



Анализ результатов (табл. 2) позволяет ранжировать рассмотренные 3D CAD-системы моделирования по степени убывания качества триангуляции следующим образом: Geomagic Studio, MeshLab, КОМПАС-3D, AutoCAD, T-FLEX Parametric CAD, SolidWorks, PowerSHAPE и Magics.

#### *Выводы*

Предложенные новые обобщенные нормализованные критерии позволяют существенно повысить уровень оценки качества триангуляции 3D моделей. Нормализация критериев обеспечивается путем ввода в расчетные зависимости нормализующих коэффициентов для приведения интервалов возможных значений к единому диапазону (0, 1]. Оптимальные значения соответствуют 1 (правильный треугольник).

Сравнительный анализ качества триангуляции систем 3D моделирования промышленных изделий для наиболее распространенных CAD-систем: *SolidWorks*, *PowerSHAPE*, *КОМПАС-3D*, *T-FLEX Parametric CAD*, *AutoCAD*, *Geomagic Studio*, *MeshLab*, *Magics* показал работоспособность предложенного подхода.

Результаты работы создают методологическую основу для последующего изучения характеристик триангуляционных моделей.

**Список использованных источников:** 1. Возможности современных САД систем при переходе к триангулированным моделям / В.Л. Доброскок, Я.Н. Гаращенко, С.И. Чернышов [и др.] // Високі технології в машинобудуванні: зб. наук. праць. – 2010. – Вип. 1 (20). – С. 79-86. 2. Галанин М.П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы / Галанин М.П., Щеглов И.А. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006. – № 9. – 32 с. - (Препринт / РАН, ИПМ им. М.В. Келдыша ; 06-01-00421). 3. Галанин М.П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы / Галанин М.П., Щеглов И.А. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006. – № 10. – 32 с. – (Препринт / РАН, ИПМ им. М.В. Келдыша ; 06-01-00421). 4. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование / Н.Н. Голованов. – М.: Изд-во Физ.-мат. лит., 2002. – 472 с. 5. Скворцов А.В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне / А.В. Скворцов // Вычислительные методы и программирование. – 2002. – Т.3. – С. 14-39. 6. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле; пер. с англ. Б.И. Квасова. – М.: Изд-во «Мир», 1980. – 512 с. 7. Шайдуров В.В. Много-сеточные методы конечных элементов / В.В. Шайдуров. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.

лит., 1989. – 288 с. **8.** Энциклопедия элементарной математики: В 5 т. / Физматгиз. – М., 1963. – Т. 4: Геометрия. – 568 с. **9.** Mesh Generation for Technology CAD in Three Dimensions [Электронный ресурс] / *P. Fleischmann* // Dissertation. - 1999. - Режим доступа: <http://www.iue.tuwien.ac.at/phd/fleischmann/diss.html>. **10.** Sequential and Parallel Generation of Unstructured 3D Meshes [Электронный ресурс] / *D. Rypl* // Thesis. – 2005. – Режим доступа: <http://power2.fsv.cvut.cz/~dr/papers/Thesis>. **11.** Zheng Y. Three-dimensional unstructured mesh generation: Part 3. Volume meshes / *Y. Zheng, R.W. Lewis, D.T. Gethin* // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 1996. – Vol. 134. – P. 285-310.

**Bibliography (transliterated):** 1. Vozmozhnosti sovremennyh CAD sistem pri perehode k triangulirovannym modeljam / V.L. Dobroskok, Ja.N. Garawenko, S.I. Chernyshov [i dr.] // *Visoki tehnologii v mashinobuduvanni: zb. nauk. prac'*. – 2010. – Vip. 1 (20). – S. 79-86. 2. Galanin M.P. Razrabotka i realizacija algoritmov trehmernoj trianguljicii slozhnyh prostranstvennyh oblastej: iteracionnye metody / Galanin M.P., Weglov I.A. – М.: IPM im. M.V. Keldysha RAN, 2006. – № 9. – 32 s. - (Preprint / RAN, IPM im. M.V. Keldysha ; 06-01-00421). 3. Galanin M.P. Razrabotka i realizacija algoritmov trehmernoj trianguljicii slozhnyh prostranstvennyh oblastej: prjamyje metody / Galanin M.P., Weglov I.A. – М.: IPM im. M.V. Keldysha RAN, 2006. – № 10. – 32 s. – (Preprint / RAN, IPM im. M.V. Keldysha ; 06-01-00421). 4. Golovanov N.N. Geometricheskoe modelirovanie / N.N. Golovanov. – М.: Izd-vo Fiz.-mat. lit., 2002. – 472 s. 5. Skvorcov A.V. Obzor algoritmov postroeniya trianguljicii Delone / A.V. Skvorcov // *Vychislitel'nye metody i programmirovanije*. – 2002. – Т.3. – S. 14-39. 6. S'jarle F. Metod konechnyh jelementov dlja jellipticheskikh zadach / F. S'jarle; per. s angl. B.I. Kvasova. – М.: Izd-vo «Mir», 1980. – 512 s. 7. Shajdurov V.V. Mnogo-setochnye metody konechnyh jelementov / V.V. Shajdurov. – М.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1989. – 288 s. 8. Jenciklopedija jelementarnoj matematiki: V 5 t. / Физматгиз. – М., 1963. – Т. 4: Geometrija. – 568 s. 9. Mesh Generation for Technology CAD in Three Dimen-sions [Jelektronnyj resurs] / *P. Fleischmann* // Dissertation. - 1999. - Rezhim dostupa: <http://www.iue.tuwien.ac.at/phd/fleischmann/diss.html>. 10. Sequential and Parallel Generation of Unstructured 3D Meshes [Jelektronnyj resurs] / *D. Rypl* // Thesis. – 2005. – Rezhim dostupa: <http://power2.fsv.cvut.cz/~dr/papers/Thesis>. 11. Zheng Y. Three-dimensional unstructured mesh generation: Part 3. Volume meshes / *Y. Zheng, R.W. Lewis, D.T. Gethin* // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 1996. – Vol. 134. – P. 285-310.